第 1 章　不等式評価と極限

全 12 題

三角関数の評価を和と積分へ渡し、主要項と誤差を分けて極限を調べます。後半では、部分積分、交代和、対称性を使って、直接求めにくい量を評価できる形へ直します。

第 1 章　不等式評価と極限

1-1　三角関数の不等式と極限

テーマ：三角関数の評価から、和と積分の極限へ
難易度：★★☆　**本番の目安：**25 分
原題：大阪公立大学・2024 年度
前期日程・理系数学 第 1 問の改題

着眼点｜この問題の要点

$\sin(2x)$ を $2x$ で近似するとき、二つの値の差がどれくらい小さいかを確かめましょう。

問題 1-1　一つの不等式を、二つの極限へ

次の三つの問いを考える。n は正の整数とする。

(1) $x \geqq 0$ の範囲で、次の不等式を証明せよ。

$$2x - 2x^2 \leqq \sin(2x)$$

(2) 数列 $\{A_n\}$ を

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k}{n^2}\right)$$

で定める。$\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ。

(3) 実数 α に対して

$$B_n = n^{\alpha} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

とおく。$\{B_n\}$ が有限の値に収束するような α の範囲と、そのときの極限値を求めよ。

PIECE｜この問題で使う知識・解法

差と微分　不等式の右辺から左辺を引き、差が 0 以上であることを示す。
はさみうち　求めたい量を、同じ極限に近づく二つの式ではさむ。

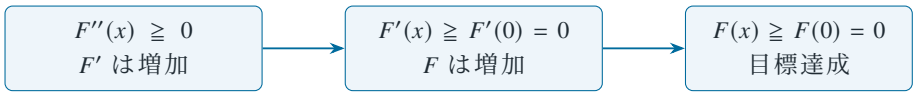
理解　今の小問で、何を示すのか

問 (1)　まずは、指定された下側の不等式だけ

$x = 0$ を代入すると両辺は 0 です。ここを出発点にできそうですね。示したいのは、右辺から左辺を引いた差が 0 以上になることです。

$$2x - 2x^2 \leqq \sin(2x) \iff F(x) := \sin(2x) - 2x + 2x^2 \geqq 0$$

$F(0) = 0$ なので、F が増加するなら目標に届きます。微分しても符号が読みにくいときは、もう一度微分してみましょう。



0 での値を確かめながら、一段ずつ戻る

ここでは $\sin(2x) \leqq 2x$ まで示す必要はありません。上からの評価は、次の和の極限を求めるときに用意します。

問 (2)　下からだけでは、極限は決まらない

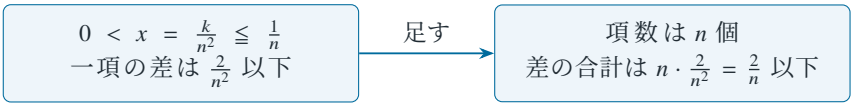
和を書き出すと、最初と最後の項は次の形です。

$$A_n = \sin\frac{2}{n^2} + \sin\frac{4}{n^2} + \cdots + \sin\frac{2}{n}$$

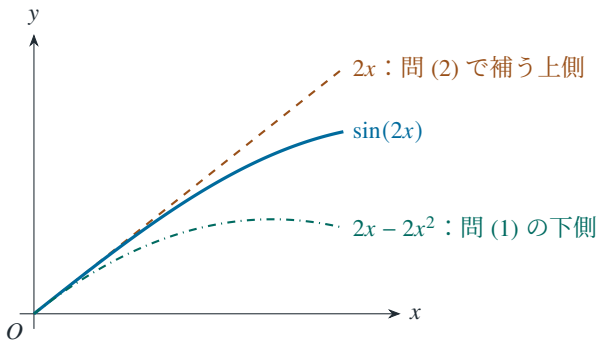
問 (1) には $x = \frac{k}{n^2}$ を代入できます。一方、下から押さえただけでは、和がさらに大きくなる可能性が残ります。そこで初めて、上側も $2x$ で押さえる方針を立てます。

$$2x - 2x^2 \leqq \sin(2x) \leqq 2x \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqq 2x - \sin(2x) \leqq 2x^2$$

右の形なら、$\sin(2x)$ を $2x$ に替えたときの**差の大きさ**が見えます。$2x^2$ は差そのものではなく、差の上限です。



一項の差を小さくするだけでなく、全部足しても小さくする



問 (2) で作る両側評価。図は関係をつかむ補助で、証明は微分で行う

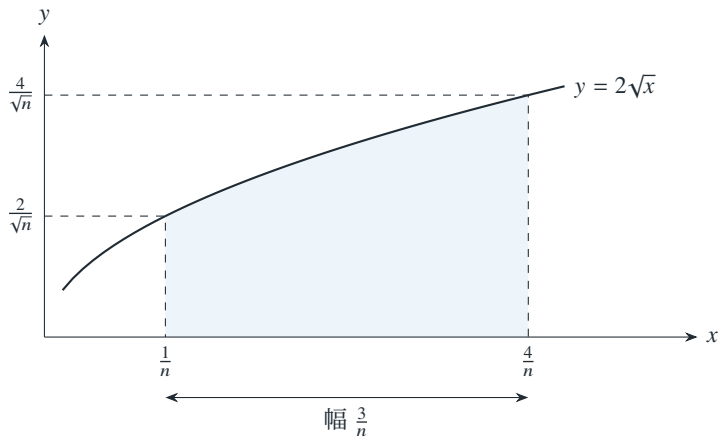
$\sin(0.1)$ などの小数値を知る必要はありません。証明できる不等式を使えば、すべての項をまとめて扱えます。

問 (3)　区間の幅と、関数の高さを見る

$\sin(2x)$ を $2x$ に替えると、被積分関数は $2\sqrt{x}$ です。積分区間では

$$\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{4}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{n}} \leqq 2\sqrt{x} \leqq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

幅は $\frac{3}{n}$、高さは $\frac{1}{\sqrt{n}}$ の定数倍です。したがって積分は $n^{-\frac{3}{2}}$ の大きさだと予想できます。正確な係数と、置き換えた差は積分で確かめます。



積分の見通し：幅と高さの両方が小さくなる（n を固定した模式図）

計画　小問ごとに、必要な操作を選ぶ

目標＝進め方 × 理由

問 (1)

目標		進め方		理由
指定された不等式を示す。	=	差を微分し、0 での値から符号を決める。	×	差が増加し、出発点で 0 なら、$x \geqq 0$ で非負だから。

問 (2)

目標		進め方		理由
和の極限を求める。	=	上側評価を補い、各項の差を足す。	×	差の合計が 0 へ近づけば、計算しやすい和と極限が一致するから。

問 (3)

目標		進め方		理由
有限値に収束する指数を決める。	=	両側を積分し、$n^{\frac{3}{2}}$ 倍する。	×	正の定数へ近づく部分と、n の累乗を分けられるから。

問 (2) では、誤差の正確な合計は不要です。$\frac{2}{n}$ 以下と分かれば 0 へ近づきます。求めるのが「値」なのか「極限」なのかで、計算の細かさを選びましょう。

問 (3) では、積分全体に掛かる n^{α} をいったん外します。積分の大きさが分かってから、α を分類すれば見通しがよくなります。

実行　示した結果を、必要な小問へつなぐ

問 (1)　差の非負性

$F(x) = \sin(2x) - 2x + 2x^2$ とおく。$x \geqq 0$ で

$$F'(x) = 2\cos(2x) - 2 + 4x, \qquad F''(x) = 4(1 - \sin(2x)) \geqq 0$$

従って F' は単調増加し、$F'(0) = 0$ より $F'(x) \geqq 0$。さらに F は単調増加し、$F(0) = 0$ より $F(x) \geqq 0$。ゆえに

$$\boxed{2x - 2x^2 \leqq \sin(2x) \quad (x \geqq 0)}$$

問 (2)　上側評価を補い、和をはさむ

$G(x) = 2x - \sin(2x)$ とおく。$G'(x) = 2(1 - \cos(2x)) \geqq 0$、$G(0) = 0$ より $G(x) \geqq 0$。問 (1) と合わせて

$$0 \leqq 2x - \sin(2x) \leqq 2x^2 \quad (x \geqq 0). \tag{★}$$

$1 \leqq k \leqq n$ に対して $x = \frac{k}{n^2}$ を代入すると

$$0 \leqq \frac{2k}{n^2} - \sin\frac{2k}{n^2} \leqq \frac{2k^2}{n^4} \leqq \frac{2}{n^2}$$

これを $k = 1, \ldots, n$ で足す。$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$ より

$$0 \leqq 1 + \frac{1}{n} - A_n \leqq \frac{2}{n}, \qquad 1 - \frac{1}{n} \leqq A_n \leqq 1 + \frac{1}{n}$$

はさみうちの原理から $\boxed{\lim_{n\to\infty} A_n = 1}$。

問 (3)　積分の大きさを先に決める

$J_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}\,dx$ とおく。区間内で $\sqrt{x} > 0$ なので、(★) を $\sqrt{x}$ で割って積分する。

$$0 \leqq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} 2\sqrt{x}\,dx - J_n \leqq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} 2x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

左右に現れる積分は

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} 2\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} = \frac{28}{3}n^{-\frac{3}{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} 2x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} = \frac{124}{5}n^{-\frac{5}{2}}.$$

従って、正の数 $n^{\frac{3}{2}}$ を掛けると

$$\frac{28}{3} - \frac{124}{5n} \leqq n^{\frac{3}{2}}J_n \leqq \frac{28}{3}, \qquad n^{\frac{3}{2}}J_n \longrightarrow \frac{28}{3} > 0$$

$B_n = n^{\alpha-\frac{3}{2}}(n^{\frac{3}{2}}J_n)$ より

$$B_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & (\alpha < \frac{3}{2}), \\ \frac{28}{3} & (\alpha = \frac{3}{2}), \\ +\infty & (\alpha > \frac{3}{2}). \end{cases}$$

最後の場合、十分大きい n で $n^{\frac{3}{2}}J_n \geqq \frac{14}{3}$ となるため、$B_n \geqq (\frac{14}{3})n^{\alpha-\frac{3}{2}} \to +\infty$ である。

ゆえに有限値へ収束する範囲は $\boxed{\alpha \leqq \frac{3}{2}}$、極限値は $\alpha < \frac{3}{2}$ で $\boxed{0}$、$\alpha = \frac{3}{2}$ で $\boxed{\frac{28}{3}}$。

検討　どの条件を使ったか、説明できるか

CHECK　微分の符号だけでは足りない

$F'' \geqq 0$ は「F' が増加する」という意味です。それだけで $F' \geqq 0$ とは言えません。$F'(0) = 0$、さらに $F(0) = 0$ を順に使ったことを確認しましょう。

CHECK　正の極限なら、やがて正の定数以上になる

$n^{\frac{3}{2}}J_n \to \frac{28}{3}$ なので、やがてその半分 $\frac{14}{3}$ より大きくなります。この下限があるから、$\alpha > \frac{3}{2}$ の発散を結論できます。小さい n から積分が正かどうかを調べる必要はありません。

◆ よくある間違い ◆　一項の差が 0 へ近づくから、和の差も 0？

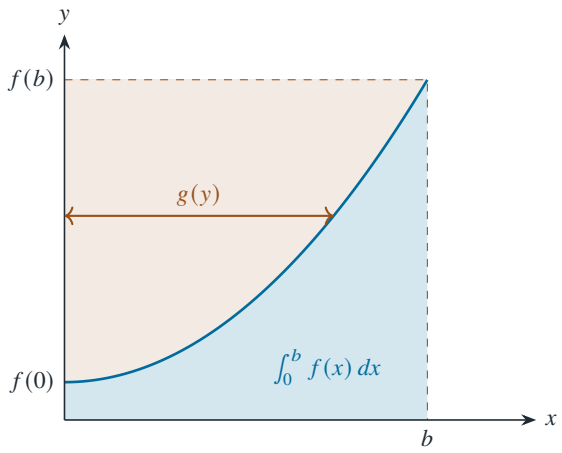
例えば $\frac{1}{n}$ は 0 へ近づきますが、n 個足すと 1 です。本問では、一項の差を $\frac{2}{n^2}$ 以下とし、n 個足した後も $\frac{2}{n} \to 0$ となることを確かめました。

Tips ｜正確に計算する量と、大きさだけ押さえる量

主要部分は計算し、差は必要な精度で評価する。問 (1) の下側評価を出発点に、問 (2) で上側を補い、問 (3) でも同じ不等式を使います。

確認｜自分の言葉で説明しよう

- 問 (2) で上側の評価を追加する理由は？
- $k \leqq n$ を使うと、平方和の計算を省けるのはなぜ？
- 問 (3) で $n^{\frac{3}{2}}$ を掛けたのはなぜ？



青：縦に積み上げる面積

橙：横に積み上げる面積

合計は $bf(b)$

逆関数の積分は、同じ長方形の残りの面積。

計画　置換した積分を、積の微分へまとめる

目標＝進め方×理由

問 (1)

目標		進め方		理由
一般式を証明する。	=	逆関数側を $y = f(x)$ で置換する。	×	和が $f(x) + xf'(x)$ となり、積の微分として積分できるから。

問 (2)

目標		進め方		理由
逆関数側だけ取り出す。	=	$\int \tan x\, dx$ を計算する。	×	既知の積分を長方形の面積から引けば、未知の積分が残るから。

問 (3)

目標		進め方		理由
計算しない積分を見分ける。	=	逆関数の積分を元の変数へ直す。	×	横方向の積分を元の変数へ戻せば、別々には求めにくい積分が相殺する。

問 (1) では $g'(y)$ を使いません。これは問 (3) の $x = 0$ で $f'(0) = 0$ となる場合にも使える点で重要です。元の関数は微分可能なので、$dy = f'(x)dx$ による置換には支障がありません。

実行　逆関数の定義域と端点をそろえる

問 (1)　一般式

f は連続かつ狭義単調増加なので、$[f(0), f(b)]$ 上に連続な逆関数 g をもつ。$y = f(x)$ と置くと

$$\int_{f(0)}^{f(b)} g(y)\, dy = \int_0^b xf'(x)\, dx$$

2　2 回後には、同じ段への合流が起こる

2 段にいる経路を試すと、0 段から 2 段へ上がる場合、1 段から 1 段上がる場合、2 段にとどまる場合があります。この三つは直前の位置が異なるので排反です。各経路の確率を掛けてから足します。

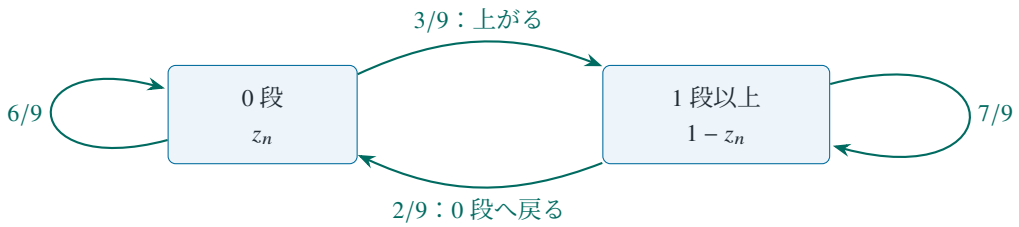
0 段 $\frac{6}{9}$	$0 \xrightarrow{\frac{6}{9}} 0, \quad 0 \xrightarrow{\frac{2}{9}} 1, \quad 0 \xrightarrow{\frac{1}{9}} 2$
1 段 $\frac{2}{9}$	$1 \xrightarrow{\frac{2}{9}} 0, \quad 1 \xrightarrow{\frac{4}{9}} 1, \quad 1 \xrightarrow{\frac{2}{9}} 2, \quad 1 \xrightarrow{\frac{1}{9}} 3$
2 段 $\frac{1}{9}$	$2 \xrightarrow{\frac{2}{9}} 0, \quad 2 \xrightarrow{\frac{4}{9}} 2, \quad 2 \xrightarrow{\frac{2}{9}} 3, \quad 2 \xrightarrow{\frac{1}{9}} 4$

1 回後の段から、2 回後へ。行ごとに確率の和は 1

3　0 段を求めるだけなら、正の段は区別しない

正の段のどこにいても、次に 0 段へ戻るのは「チョキかパーで負ける」2 通りだけです。上へは動いても、1 段ずつ下がる規則はないので、正の高さは帰還確率に影響しません。

ここでは対称な段をまとめたのではありません。**正のどの段からでも、二状態への移動確率が同じ**ことが根拠です。4-3 の対称性は、この条件を保証する一つの方法でした。



$z_{n+1} = \frac{6}{9} z_n + \frac{2}{9}(1 - z_n)$。0 段で「戻る」場合も 0 段にとどまります。

0 段か、それ以外か。漸化式に必要な二つの状態。

計画　小問ごとに必要な状態を選ぶ

目標＝進め方×理由

問 (1)

目標		進め方		理由
A の段数を求める。	=	勝った回の位置を選ぶ。	×	A は下がらないので、現在の段数が勝利回数に一致するから。

問 (2)

目標		進め方		理由
B の全位置を求める。	=	1 回後の 0、1、2 段で分ける。	×	直前の高さごとに行き先が決まり、合流する経路を加えられるから。

PIECE ｜平行移動で中心を原点へ戻す

$\xi = z-1$ と置けば、$\xi^4 + b\xi^2 + c^2 = 0$。係数が実数で偶数次だけなので、ξ が解なら $-\xi, \overline{\xi}, -\overline{\xi}$ も解です。まずこの対称性を保持し、$t = \xi^2$ の二次方程式で分類します。成分表示は、根号をほどく段階で使います。

理解　何を二次式にし、何を図形に残すか

1　点 1 を引くのは、対称の中心をそろえるため

$z-1$ をひとまとまりにすると次数が 4、2、0 とそろいます。z のまま展開すれば三次と一次の項まで現れて、偶関数の対称性が見えません。点 1 を引く操作は、すべての解を左へ 1 だけ平行移動することです。

ξ 平面では $\xi \mapsto -\xi$ が原点中心の半回転、$\xi \mapsto \overline{\xi}$ が実軸での反射です。z 平面へ戻せば、中心は点 1 になります。

2　二乗すると角は倍になる

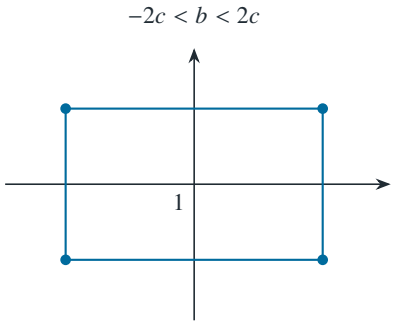
$\xi^2 = t$ において、$t > 0$ なら ξ は実数、$t < 0$ なら ξ は非零の純虚数です。t が非実数なら、ξ は実数でも純虚数でもありません。二乗が偏角を 2 倍することからも、この対応を読めます。

たとえば $b = 0, c = 2$ なら $\xi^4 = -4$。解は $\pm 1 \pm i$ で、z 平面では $0 \pm i, 2 \pm i$ の正方形になります。これは見通しの確認であり、一般の条件はこれから示します。

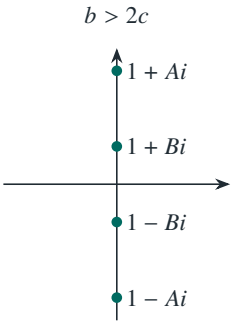
3　二重根号を避けるため、和と差を先に作る

二次方程式の解をそのまま平方根に入れると、$\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-4c^2}}{2}}$ のような二重根号が現れます。二つの正の大きさを A, B とし、$A^2+B^2 = b$、$AB = c$ を使えば、$(A+B)^2 = b+2c$、$(A-B)^2 = b-2c$ になります。

つまり消したいものは内側の平方根で、残したいものは $A+B, A-B$ です。非実数の t の場合も、$\xi = a + di$ の絶対値と実部の式を足し引きし、a^2, d^2 を直接取り出します。



$1 \pm a \pm di$：長方形



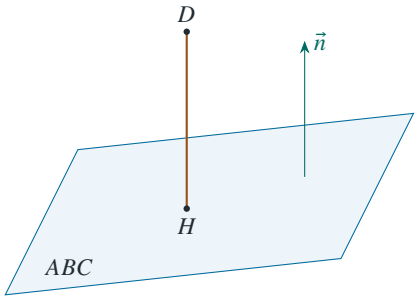
等間隔なら $A - B = 2B$

四つの根は、長方形か一直線。中心はどちらも 1。

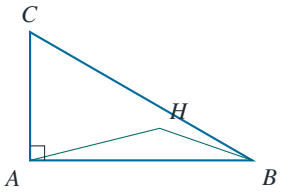
2　外積の公式を知らなくても、法線は作れる

法線とは、その平面内のどの方向にも垂直な非零ベクトルです。平面内の独立な二方向に垂直なら、その一次結合にも垂直なので十分です。

(p,q,r) とおいて二つの内積を 0 にします。単位長さの条件まで一度に展開するのではなく、まず成分の比を決めます。最後に全体を長さで割れば、向きの計算と大きさの計算を分けられます。

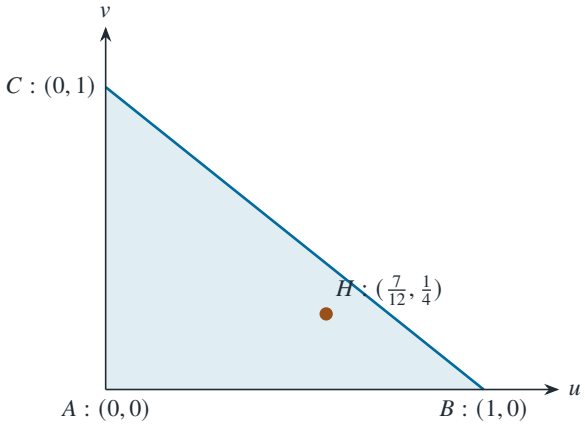


見かけの長さ・角度は
実際の値を表さない



$AB=\sqrt{6},\ AC=\sqrt{2}$

法線方向の図は概念図。右は $t=0$ の面内を正面から見た図



$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$

内部なら $u>0,\ v>0$

さらに $u+v<1$

$t=0$ の垂線の足では

$u+v=\frac{5}{6}<1$

三角形の内部条件は、係数の平面で確認できる。

計画　除くべき成分を、法線方向に選ぶ

目標＝進め方×理由

問 (1)

目標		進め方		理由
s を消去する。	=	内積の一次式を解く。	×	$t+1>0$ が分母 0 を除き、C の位置を t 一つで決められるから。